

Schwingung eines Plasmazylinders in einem axialen Magnetfeld II

Von KLAUS KÖRPER

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik, Göttingen *
(Z. Naturforsch. 15 a, 220—226 [1960]; eingegangen am 17. Januar 1960)

Radial oscillations are excited in a homogeneous infinite plasma cylinder in a homogeneous axial magnetic field by a surface current which is homogeneous in the axial and azimuthal directions. The modes of oscillations corresponding to the axial and azimuthal components of current are not coupled, and so they may be analysed separately. The magnetic field in the plasma and vacuum is obtained, and the indices of refraction for both types of oscillations are discussed thoroughly. When the currents are parallel to the external magnetic field, the oscillations are characterized by the refractive index of Eccles. On the other hand, when the current is perpendicular to the magnetic field two resonance frequencies exist, which depend on the density of the plasma and the magnetic field strength. — In the latter case the radial characteristic oscillations of the plasma cylinder in an external magnetic field are considered.

Es werden die Schwingungen eines kreiszylindrischen unendlich langen, einem statischen homogenen axial gerichteten Magnetfeld ausgesetzten homogenen Plasmazylinders untersucht. Die Anregung erfolgt durch elektromagnetische Wellen, welche in einer den Plasmazylinder umgebenden Spule erzeugt werden und radial nach innen und außen laufen¹.

Das Plasma wird als quasi-neutral vorausgesetzt. Die Grundgleichungen² entsprechen einer makroskopischen phänomenologischen Betrachtungsweise des Plasmas als einer aus zwei Komponenten bestehenden Flüssigkeit und enthalten nach den Vorstellungen der klassischen Elektronentheorie nur elektrische und magnetische Vakuumfelder sowie Ladung und Masse tragende bewegte Elektronen und Ionen. Druckterme, Wärmeleitfähigkeit und Viskosität werden vernachlässigt, ferner werden nur im Vergleich zum statischen Magnetfeld kleine magnetische Wechselfelder angenommen. Das System der Grundgleichungen enthält die MAXWELLSchen Gleichungen, die Bewegungsgleichung und das Diffusionsgesetz (verallgemeinertes OHMSches Gesetz). — Außerhalb des Plasmas gelten die üblichen MAXWELLSchen Gleichungen.

An die Lösungen des das gesamte Wellenfeld beschreibenden Systems von Differentialgleichungen sind als Randbedingungen die Regularitätsforderung auf der Spulennachse und die SOMMERFELDSche Ausstrahlungsbedingung im Unendlichen zu stellen. Als Grenzbedingung erhält man für die Trennfläche zwischen Plasma und Vakuum bei Abwesenheit von Flächenströmen, daß die Tangentialkomponenten des magnetischen Feldes stetig übergehen müssen. Der Sprung in der Normalkomponente des elektrischen Feldes gibt Veranlassung zu einer Oberflächen-

ladung. Da der Vakuumzwischenraum zwischen Plasmazylinder und Spule, von der Ausbildung stehender Wellen abgesehen, physikalisch ohne wesentliche Bedeutung ist, kann man ihn näherungsweise vernachlässigen. Dann läßt sich der Einfluß der Spule formal durch Oberflächenströme in der Plasmaoberfläche berücksichtigen. Man erhält dann in bekannter Weise einen Sprung in den Tangentialkomponenten des Magnetfeldes.

I. Erzwungene Schwingung des Plasmazylinders

Eine längs des Plasmazylinders homogene Anregung der Schwingung durch die äußere azimuthale Stromverteilung

$$j_\varphi(r, t) = \hat{I}_\varphi \cdot \delta(r - R) \cdot e^{i\omega t} \quad (1)$$

erzeugt ein von der axialen Koordinate z und von der azimuthalen Koordinate φ unabhängiges Wellenfeld. $\delta(x)$ ist die DIRACsche Deltafunktion. \hat{I}_φ bedeutet den gesamten Strom in φ -Richtung pro Längeneinheit des Plasmazylinders und $r = R$ den Ort der Stromschicht auf dem Zylindermantel. Man erhält im Plasma ($r \leq R$) aus den linearisierten Grundgleichungen des Plasmas

$$\text{rot } \mathfrak{E} = \frac{4\pi}{c} \mathfrak{j} + i \frac{\omega}{c} \mathfrak{E}, \quad (2)$$

$$\text{rot } \mathfrak{E} = -i \frac{\omega}{c} \mathfrak{E}, \quad (3)$$

$$\text{div } \mathfrak{E} = \frac{1}{c} [\mathfrak{j} \times \mathfrak{E}_0], \quad (4)$$

* Seit Herbst 1958 in München.

¹ K. KÖRPER, Z. Naturforsch. 12 a, 815 [1957]. Im folgenden mit I zitiert.

² A. SCHLÜTER, Z. Naturforsch. 5 a, 721 [1950].



$$\frac{4\pi}{\omega_p^2} (i\omega + \gamma) \mathbf{j} = \mathfrak{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \boldsymbol{\xi}_0] - \frac{m_i - m_e}{e} i\omega \mathbf{v} \quad (5)$$

für die elektromagnetischen Feldstärken \mathfrak{E} , $\boldsymbol{\xi}$

$$E_\varphi(r, t) = a \cdot J_1(nkr) e^{i\omega t}, \quad (6)$$

$$H_z(r, t) = a i n \cdot J_0(nkr) e^{i\omega t}, \quad (7)$$

$$E_r(r, t) = a \cdot \Omega \cdot J_1(nkr) e^{i\omega t}. \quad (8)$$

Für die hydrodynamische Geschwindigkeit

$$\mathbf{v} = \frac{m_i}{m_i + m_e} \cdot \mathbf{v}_i + \frac{m_e}{m_i + m_e} \cdot \mathbf{v}_e \quad (9)$$

(der Index i bezieht sich auf Ionen, der Index e auf Elektronen) ergibt sich

$$v_r(r, t) = \frac{c}{H_0} \frac{\omega_0^2}{\omega_p^2} (n^2 - 1) a J_1(nkr) e^{i\omega t}, \quad (10)$$

$$v_\varphi(r, t) = \frac{c}{H_0} \frac{\omega_0^2}{\omega_p^2} \Omega a J_1(nkr) e^{i\omega t} \quad (11)$$

und für die Stromdichte (N ist die Ionendichte)

$$\mathbf{j} = e N (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e) \quad (12)$$

folgt

$$\mathbf{j}_r(r, t) = -\frac{i\omega}{4\pi} \Omega a J_1(nkr) e^{i\omega t}, \quad (13)$$

$$\mathbf{j}_\varphi(r, t) = \frac{i\omega}{4\pi} (n^2 - 1) a J_1(nkr) e^{i\omega t}. \quad (14)$$

$J_0(x)$, $J_1(x)$ sind BESSEL-Funktionen nullter und erster Ordnung, und $k = \omega/c$ ist die Wellenzahl einer Welle der Kreisfrequenz ω im Vakuum. Ω steht als Abkürzung für den dimensionslosen Ausdruck

$$\Omega = \frac{i\omega\omega_H \cdot \omega_p^2}{(\omega_p^2 + \omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega) - \omega^2\omega_H^2}. \quad (15)$$

n ist der Brechungsindex des Plasmas für Wellen, deren Ausbreitungsrichtung und deren elektrisches Wechselfeld senkrecht zum äußeren statischen Magnetfeld steht:

$$n^2 = 1 - \frac{\omega_p^2(\omega_p^2 + \omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)}{\omega^2\omega_H^2 - (\omega_p^2 + \omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)}. \quad (16)$$

n^2 und Ω besitzen denselben Resonanznenner. Es bedeuten

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi\rho e^2}{m_i m_e} = \omega_{pe}^2 + \omega_{pi}^2 \quad (17)$$

das Quadrat der Plasmafrequenz,

$$\omega_0^2 = \frac{e^2 H_0^2}{c^2 m_i m_e} = \omega_{ce} \cdot \omega_{ci} \quad (18)$$

das Produkt aus den Gyrofrequenzen der Elektronen und Ionen und

$$\omega_H = \frac{eH_0}{c} \left(\frac{1}{m_e} - \frac{1}{m_i} \right) = \omega_{ce} - \omega_{ci} \quad (19)$$

die modifizierte Gyrofrequenz der Elektronen.

γ ist die mittlere Frequenz der Stöße zwischen Ionen und Elektronen. Sie hängt bei nicht zu hohen Temperaturen gemäß

$$\gamma = \text{const} \cdot N T^{-3/2} \quad (20)$$

von der Temperatur und der Teilchendichte ab³. Bei höheren Temperaturen sind quantenmechanische Korrekturen anzubringen. e ist die (positive) Elementarladung, H_0 das äußere homogene statische Magnetfeld.

Die Amplitude der Welle im Plasma wird über die Grenzbedingungen festgelegt:

$$a = i \frac{4\pi}{c} \hat{I}_\varphi \quad (21)$$

$$\frac{H_1^{(2)}(kR)}{J_1(nkR) \cdot H_0^{(2)}(kR) - n \cdot J_0(nkR) \cdot H_1^{(2)}(kR)}.$$

Im Vakuum ($r \geq R$) erhält man die transversale Welle

$$E_\varphi(r, t) = \alpha_2 H_1^{(2)}(kr) e^{i\omega t}, \quad (22)$$

$$H_z(r, t) = \alpha_2 i H_0^{(2)}(kr) e^{i\omega t} \quad (23)$$

mit der Amplitude

$$\alpha_2 = i \frac{4\pi}{c} \hat{I}_\varphi \quad (24)$$

$$\frac{J_1(nkR)}{J_1(nkR) \cdot H_0^{(2)}(kR) - n \cdot J_0(nkR) \cdot H_1^{(2)}(kR)}.$$

$H_1^{(2)}(x)$ und $H_0^{(2)}(x)$ sind HANKEL-Funktionen erster und nullter Ordnung zweiter Art. Da das Argument reell ist, werden durch (22) und (23) nach außen laufende ungedämpfte Zylinderwellen beschrieben.

Die spiralförmige Form einer Hochfrequenzspule bedingt neben der azimutalen Stromkomponente auch eine axiale Stromkomponente

$$j_z(r, t) = \hat{I}_z \cdot \delta(r - R) e^{i\omega t}. \quad (25)$$

Diese regt im Plasma ($r \leq R$) Wellen des Typs

$$H_\varphi(r, t) = b \cdot J_1(mkr) e^{i\omega t}, \quad (26)$$

$$E_z(r, t) = -i \frac{b}{m} \cdot J_0(mkr) e^{i\omega t} \quad (27)$$

und im Vakuum ($r \geq R$)

$$H_\varphi(r, t) = \beta \cdot H_1^{(2)}(kr) e^{i\omega t}, \quad (28)$$

$$E_z(r, t) = -i \beta \cdot H_0^{(2)}(kr) e^{i\omega t} \quad (29)$$

³ L. SPITZER JR., Physics of Fully Ionized Gases. Interscience Publishers, Inc. New York 1956.

mit den Amplituden

$$b = \frac{4\pi}{c} \hat{I}_z \cdot \frac{m H_0^{(2)}(kR)}{J_0(mkR) \cdot H_1^{(2)}(kR) - m \cdot J_1(mkR) \cdot H_0^{(2)}(kR)} \quad (30)$$

und

$$\beta = \frac{4\pi}{c} \hat{I}_z \cdot \frac{J_0(mkR)}{J_0(mkR) \cdot H_1^{(2)}(kR) - m \cdot J_1(mkR) \cdot H_0^{(2)}(kR)} \quad (31)$$

an. Da im Plasma diesem Schwingungstyp eine magnetfeldparallele Stromdichte in axialer Richtung entspricht, verschwindet die LORENTZ-Kraft und damit die Wirkung des Magnetfeldes. Die Schwingung wird deshalb bestimmt durch den ECCLESSchen Brechungsindex, der für die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in einem magnetfeldfreien Plasma bekannt ist:

$$m^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - i\gamma\omega} \quad (32)$$

Da die Betriebsfrequenz ω weit unterhalb der Plasmafrequenz ω_p liegt, ist dieser Brechungsindex im vorliegenden Fall praktisch rein imaginär, und die Welle dringt nur wenig in das Plasma ein. Die ursprünglich schräg liegende Polarisationsrichtung (Richtung von \mathfrak{E}) wird innerhalb einer oberflächennahen Schicht der Dicke $d = c/\omega_p$ wieder in die φ -Richtung gedreht. Da außerdem bei Spulenwicklungen üblicher Ganghöhe die axiale Stromkomponente klein ist gegen die azimutale, sind nur die Schwingungen transversal zum äußeren Magnetfeld von Bedeutung.

Durch das Lösungssystem (6) bis (14) wird im Plasma eine stehende elliptisch polarisierte Welle beschrieben. Einen anschaulichen Überblick über die die Ortsabhängigkeit liefernden komplexwertigen BESSEL-Funktionen gewinnt man aus Kurven, die in der komplexen z -Ebene Betrag und Phase von $J_\nu(z)$ darstellen⁴. Die Vektoren des elektrischen Feldes, der hydrodynamischen Geschwindigkeit und der Stromdichte beschreiben an jeder Stelle des Zylinders Ellipsen in der Querschnittsebene mit der Frequenz ω der anregenden Strahlung. Da bei Abwesenheit von Elektron-Ion-Wechselwirkungen ($\gamma = 0$) die Größe Ω (15) imaginär und das Quadrat des Brechungsindex n^2 (16) reell ist, sind die Ellipsen von j und ν gegen die von \mathfrak{E} zeitlich um $\frac{1}{2}\pi$ verschoben, so daß wegen (9) und (12) das elektrische Feld an den Ionen und Elektronen nur Blindleistung verrichten kann. Bei Anwesenheit von Ion-Elektron-Stößen erhalten j bzw. ν und \mathfrak{E} zur gleichen Zeit auch gleichgerichtete Komponenten, so daß eine Energieauf-

nahme möglich ist. — Untersuchungen, die wesentlich die thermische Geschwindigkeitsverteilung der Ionen und Elektronen im Plasma berücksichtigen, haben ergeben, daß bei transversalen Wellen eine Dämpfung durch thermische Phasenmischung (LANDAU-Dämpfung) nicht erfolgt⁵. Alle energetischen Betrachtungen werden sich ausschließlich auf die durch wechselseitige Streuung der geladenen Plasmakonstituenten (Ionen und Elektronen) bedingte Stoßdämpfung stützen.

II. Der Brechungsindex

Der Ausdruck (16) für den Brechungsindex des Plasmas läßt sich entwickeln. Mit den dimensionslosen Abkürzungen

$$x = (\omega/\omega_0)^2, \quad s = (\omega_p/\omega_0)^2, \quad t = \gamma/\omega_0 \quad (33)$$

erhält man in dem praktisch immer vorliegenden Fall

$$s \gg 1, \quad s \gg x, \quad t \ll \frac{1}{\mu} = \frac{(m_i - m_e)^2}{m_i m_e} \approx \frac{m_i}{m_e}$$

die Beziehung

$$n^2 = 1 - s \cdot \frac{s \cdot \left[x \left(\frac{1}{\mu} + s \right) - s \right] + i t \sqrt{x} \left[s^2 + x \left(\frac{1}{\mu} + s \right) \right]}{\left[x \left(\frac{1}{\mu} + s \right) - s \right]^2 + t^2 x s^2} \quad (34)$$

Der Verlauf von $(n^2)_r = \Re(n^2)$ und $(n^2)_i = \Im(n^2)$ hat ein für Absorptionsstellen typisches Verhalten. Abb. 1 zeigt schematisch für den Fall $s \gg 1/\mu$ die

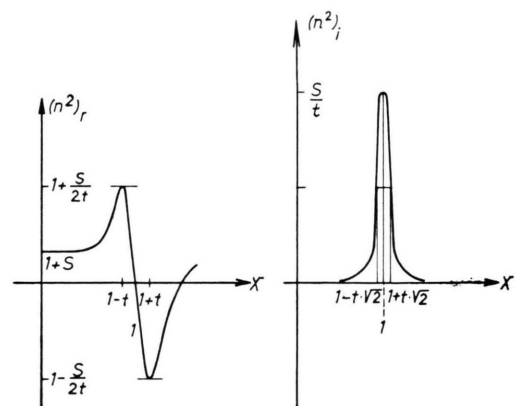


Abb. 1. Brechungsindex in der Umgebung der Ionenresonanz (schematisch).

⁴ Z. B. JAHNKE-EMDE, Tafeln höherer Funktionen, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1948.

⁵ IRA B. BERNSTEIN, Phys. Rev. **109**, 10 [1958].

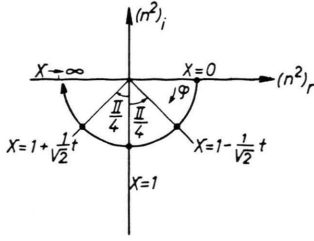


Abb. 2. Phasenwinkel φ des Brechungsindex in der Umgebung der Ionenresonanz, dargestellt in der komplexen n^2 -Ebene.

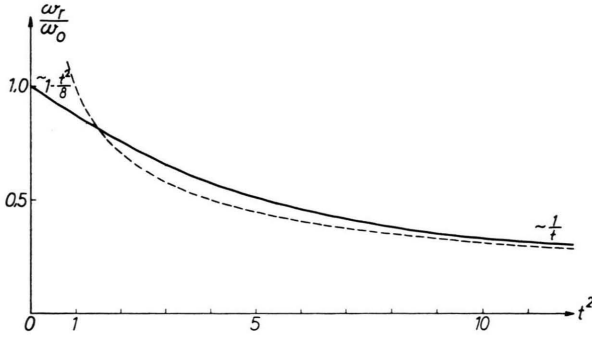


Abb. 3. Verschiebung der Ionenresonanz durch Dämpfung im Falle $s \gg 1/\mu$, $s \gg t$. $s = (\omega_p/\omega_0)^2$, $t = \gamma/\omega_0$. Die gestrichelte Kurve stellt die Funktion $f=1/t$ dar.

Umgebung der Ionenresonanz, welche in diesem Falle bei der mittleren Gyrofrequenz ($x=1$) liegt.

Resonanzüberhöhung und Halbwertsbreiten können den Kurven entnommen werden. Die außerordentliche Schärfe der Resonanz wird durch Abb. 2 angedeutet. Der Phasenwinkel

$$\varphi = \arctg \frac{(n^2)_i}{(n^2)_r} \quad (35)$$

in der komplexen n^2 -Ebene durchläuft in der Umgebung der Ionenresonanz den Bereich von $-\frac{1}{4}\pi$ bis $-\frac{3}{4}\pi$, wenn sich das relative Frequenzquadrat x nur in dem kleinen Bereich

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}}t < x < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}t$$

bewegt. Wegen der Schärfe der Absorptionsstellen gilt daher die für $t \ll 1$ gültige Entwicklung

$$n^2 = 1 - \frac{s(1-x+s)}{x/\mu - (1-x+s)(1-x)} - it \cdot \sqrt{x} \cdot \frac{s[x/\mu + (1-x+s)^2]}{[x/\mu - (1-x+s)(1-x)]^2} \quad (36)$$

praktisch im gesamten Frequenzbereich. Hier treten die Resonanzstellen als Pole erster bzw. zweiter Ordnung in Erscheinung. Die geringe Verschiebung der Lage der Resonanzstellen durch die temperatur-

abhängige Dämpfung t ist im Falle $t \ll 1$ zu vernachlässigen.

Eine genauere Abschätzung lehrt, daß im Falle $s \gg 1/\mu$, $s \gg t$, $s \gg x$ die Resonanzstelle (Maximum von $(n^2)_i$ bei $t \ll 1$ durch Dämpfung nach $\omega_r = \omega_0(1 - \frac{1}{8} \cdot t^2)$ verschoben wird. Im Grenzfall großer t geht sie gegen Null gemäß $\omega_r/\omega_0 \rightarrow \omega_0/\gamma$. Außerdem findet eine Verbreiterung und Abflachung der Resonanzkurven statt. In Abb. 3 ist die Abhängigkeit der Lage der Ionenresonanz von der Stoßfrequenz dargestellt. Aus dem Vergleich mit der Funktion $f=1/t$ ersieht man, daß bereits für $t > 1$ die Relation

$$\omega_r \cdot \gamma \approx \omega_0^2 \quad (37)$$

mit einem Fehler $< 10^{-1}$ erfüllt ist. Die Resonanzfrequenz steigt dann quadratisch mit dem Magnetfeld an.

Setzt man $n^2 = 2a + i2b$, dann folgt für die Quadrate von Real- und Imaginärteil

$$n_r^2 = a + \sqrt{a^2 + b^2}, \quad n_i^2 = -a + \sqrt{a^2 + b^2}. \quad (38)$$

Da außerhalb der Nullstellen von a für alle praktischen Fälle $a^2 \gg b^2$ ist, läßt sich die Wurzel entwickeln:

$$\left. \begin{aligned} n_r^2 &\approx 2a, & n_i^2 &\approx b^2/2a & \text{für } a > 0, \\ n_i^2 &\approx 2|a|, & n_r^2 &\approx b^2/2|a| & \text{für } a < 0. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Das Vorzeichen von n_i ist bei $n_r > 0$ so festzulegen, daß von außen in das Plasma eindringende Wellen abklingen; es folgt $n_i < 0$.

Die geringe Temperaturabhängigkeit von n_r bei $a > 0$ und von n_i bei $a < 0$ wurde vernachlässigt. Während b negativ definit ist, ändert a sein Vorzeichen an jeder Nullstelle und jedem der zwei Pole.

Die Abhängigkeit der Lage der Nullstellen und Pole des Realteiles von n^2 von der Teilchendichte und dem statischen Magnetfeld zeigt Abb. 3 in Arbeit I. Dort wurde $2a = \Re(n^2)$ mit n_0^2 bezeichnet. Die der Stoßfrequenz proportionale Größe b bestimmt je nach Lage der Frequenz ω relativ zu den Resonanzfrequenzen der Ionen und Elektronen entweder den Realteil n_r oder den Imaginärteil n_i des Brechungsindex (39). In den Abb. 4 und 5 sind n_r und n_i in Abhängigkeit von $x = (\omega/\omega_0)^2$ im Bereich $10^{-4} \leq x \leq 10^8$ für einige Werte des Parameters $s = (\omega_p/\omega_0)^2$, $10^1 \leq s \leq 10^9$ aufgetragen. Die Abb. 5 enthält den der relativen Stoßfrequenz $t = \gamma/\omega_0$ proportionalen Anteil des Brechungsindex. Aufgetragen ist $-n_i/t$ bzw. n_r/t . Jede Stelle, an der $2a = n_0$ sein Vorzeichen ändert (Nullstelle oder Pol),

ist durch einen vertikalen Strich gekennzeichnet. Hier wechselt die Bedeutung der Kurve der Abb. 4 in wechselt die Bedeutung der Kurve der Abb. 4 in Richtung steigender Frequenz x von n_r zu n_i , n_r , n_i , n_r , und die der Abb. 5 von n_i zu n_r , n_i , n_r , n_i . Da die durch einen Bogen \frown gekennzeichneten Abschnitte der Kurvenzüge bei $s \geq 10^5$ auf einen sehr schmalen Frequenzbereich in der Umgebung der Elektronenresonanz (\approx Plasmafrequenz) zusammenfallen, ist auf ihre genaue Darstellung in diesem Bereich verzichtet worden. Einzelheiten in I. Abb. 4.

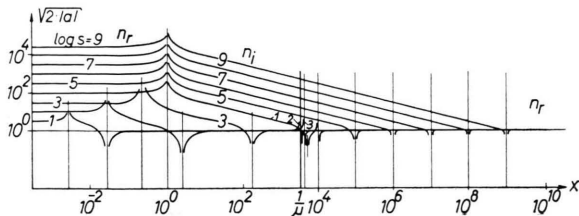


Abb. 4. Real- und Imaginärteil des Brechungsindex n als Funktion der Frequenz. $x = (\omega/\omega_0)^2$, $s = (\omega_p/\omega_0)^2$, $t = \gamma/\omega_0 = t(N, T, H_0)$ aus Abb. 6. $n^2 = 2a + 2ib$.

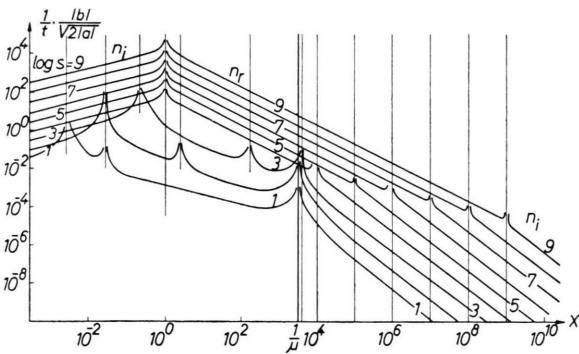


Abb. 5. Real- und Imaginärteil des Brechungsindex n als Funktion der Frequenz. x, s, t wie in Abb. 4.

Aus den Abb. 4 und 5 geht hervor, daß unterhalb der Ionenresonanz der Brechungsindex im wesentlichen reell ist. Daher stellen die Lösungen (6) bis (14) schwach gedämpfte stehende Wellen dar.

Abb. 6 zeigt die relative Stoßfrequenz $t = \gamma/\omega_0$ in Abhängigkeit von der Teilchendichte N , dem Magnetfeld H_0 und der Temperatur T . Aufgetragen ist $t \cdot 10^v$ über der Teilchendichte für einige Temperaturen. Den numerischen Werten liegt das Buch von SPITZER zugrunde³.

Wenn die von außen kommende elektromagnetische Welle den Plasmazylinder durchdringen soll, hat man für die Eindringtiefe $d = 1/|n_i|k > R$ zu fordern. Bei einem Magnetfeld von 10^4 GAUSS und großer Teilchendichte ($N \geq 10^{14} \text{ cm}^{-3}$) liegt die

Ionenresonanz bei der mittleren Gyrofrequenz. Für $R = 5 \text{ cm}$ folgt daher: $|n_i| < 2$.

Da im Falle $s \gg 1/\mu$

$$n_i = -\frac{t}{2} \sqrt{x} \cdot \left[1 - x \cdot \left(1 + \frac{1}{\mu s} \right) \right]^{3/2} \quad (40)$$

$$= \text{const } \omega \cdot \left(\frac{N}{H_0^2 T (1-x)} \right)^{3/2}$$

ist, nimmt also die Eindringtiefe d mit $(H_0^2 T/N)^{3/2}$ zu. Die Tabelle zeigt für $T = 10^5 \text{ }^\circ\text{K}$, $N = 10^{14} \text{ cm}^{-3}$, $H_0 = 10^4 \text{ GAUSS}$ den Imaginärteil n_i des Brechungs-

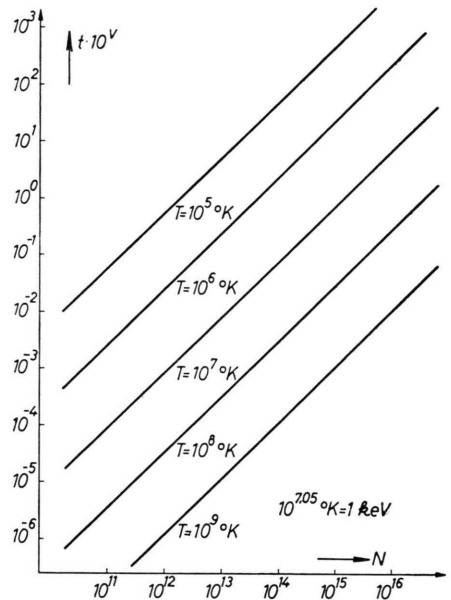


Abb. 6. Stoßfrequenz γ als Funktion der Teilchendichte N und der Temperatur T . Aufgetragen ist $(\gamma/\omega_0) \cdot 10^v$. $v = \log(H_0 \cdot \text{GAUSS}^{-1})$, $t = \gamma/\omega_0$.

indexes bei einigen Frequenzen. Werte für andere Parameter lassen sich wegen (40) hieran leicht anschließen.

$-n_i$	0,2	0,3	0,5	1,0	3,0
x	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9

Tab. 1.

III. Freie Schwingungen eines Plasmazylinders in einem axialen Magnetfeld

Bei Abwesenheit eines äußeren anregenden Stromes \hat{I}_φ erscheinen die Grenzbedingungen für die Felder (6), (7) und (22), (23) an der Plasmaoberfläche in Form eines linearen, homogenen Gleichungs-

systems. Das Verschwinden seiner Koeffizientendeterminante ist eine notwendige Bedingung für die Existenz nichttrivialer Lösungen für die Amplituden a und α_2 :

$$\mathfrak{N}^{(2)}(\omega) \equiv J_1\left(n(\omega) \omega \frac{R}{c}\right) \cdot H_0^{(2)}\left(\omega \frac{R}{c}\right) - n(\omega) \cdot J_0\left(n(\omega) \omega \frac{R}{c}\right) \cdot H_1^{(2)}\left(\omega \frac{R}{c}\right) = 0. \quad (41)$$

Die Lösungen ω dieser charakteristischen Gleichung stellen die Eigenfrequenzen der radialen Schwingungen des Plasmazylinders dar. Wie aus der Herleitung ersichtlich, regen die kollektiven Bewegungen des Plasmas elektromagnetische Zylinderwellen im Vakuum an, die ins Unendliche laufen. Daher müssen aus energetischen Gründen die Schwingungen gedämpft und die Eigenfrequenz ω komplex mit positivem Imaginärteil sein. Neben dieser Strahlungsdämpfung findet ein Verlust an Schwingungsenergie durch dissipative Vorgänge im Plasma statt, welcher auf der Ion-Elektron-Streuung beruht. — Die Darstellung abklingender Schwingungen gedämpfter Systeme als komplexe Lösung einer charakteristischen Gleichung ist aus der elementaren Schwingungstheorie bekannt.

Bei verschwindender Elektron-Ion-Wechselwirkung ($\gamma = 0$) wird der Brechungsindex $n_0(\omega) \equiv n(\omega)_{\gamma=0}$ je nach Lage der Frequenz reell oder imaginär. Wegen der Symmetrie von $J_0(z)$ und $n_0(\omega)$ und der Antimetrie⁶ von $J_1(z)$:

$$J_0(-z) = J_0(z), \quad (42)$$

$$J_1(-z) = -J_1(z), \quad (43)$$

$$n_0(-\omega) = n_0(\omega) \quad (44)$$

$$\text{und wegen } H_1^{(2)}(-z) = H_1^{(1)}(z), \quad (45)$$

$$H_0^{(2)}(-z) = -H_0^{(1)}(z) \quad (46)$$

$$\text{folgt} \quad \mathfrak{N}_{\gamma=0}^{(2)}(\omega) = \mathfrak{N}_{\gamma=0}^{(1)}(-\omega). \quad (47)$$

Hierbei deutet der obere Index (1) an, daß in (41) die HANKEL-Funktion zweiter Art durch die entsprechenden HANKEL-Funktionen erster Art zu ersetzen sind. Diese stellen einlaufende, aus dem Unendlichen kommende Zylinderwellen dar, wie man aus ihrer asymptotischen Darstellung erkennt.

Die Eigenfrequenzen des durch zeitlich exponentiell zunehmende äußere Erregung zu Schwingungen

angefachten schwingungsfähigen Plasmazylinders kann man also bei verschwindender innerer Dämpfung des Plasmas aus denen des abklingenden Zylinders durch Spiegelung am Nullpunkt erhalten.

Die Entwicklungskoeffizienten analytischer Funktionen $f(z)$, die auf der reellen Achse reelle oder imaginäre Werte annehmen, sind reell bzw. imaginär. Daher gilt für solche Funktionen

$$(f(z))^* = \pm f(z^*) \quad (48)$$

Wegen (42) und (43) folgt dann aus (41)

$$(\mathfrak{N}_{\gamma=0}^{(2)}(\omega))^* = \mathfrak{N}_{\gamma=0}^{(1)}(\omega^*). \quad (49)$$

Die Eigenfrequenz der von außen angefachten Schwingung kann man also im dämpfungsfreien Fall aus der der abklingenden Schwingung auch durch Spiegelung an der reellen Achse erhalten. An- und Abklingkonstanten des Systems sind also gleich.

In der komplexen ω -Ebene liegen somit bei Abwesenheit interner Dämpfung die Eigenwerte von $\mathfrak{N}_{\gamma=0}^{(2)}(\omega) = 0$ auch bei Berücksichtigung des äußeren Wellenfeldes spiegelsymmetrisch zu beiden Koordinatenachsen.

Im Falle $\gamma \neq 0$ wird die Spiegelsymmetrie zur reellen Achse gestört, da die Energiedissipation bei an- und abklingenden Schwingungen eine Dämpfung bewirkt und alle Eigenfrequenzen in Richtung der positiv imaginären Halbachse verschiebt, während die Symmetrie bezüglich der imaginären Achse auf Grund des Ansatzes $e^{+i\omega t}$ natürlich erhalten bleibt.

Ein grober Überblick über die Lage der Nullstelle von (41) läßt sich leicht gewinnen. Wegen der Größe von $|n(\omega)|$ (Abb. 4 und 5) werden die Eigenwerte ω im wesentlichen durch die Nullstellen von $J_0\left(n(\omega) \omega \frac{R}{c}\right)$ festgelegt; man kommt also in die Eigenresonanz des Systems, wenn das magnetische Wechselfeld in der Nähe des Zylindermantels verschwindet (7).

Berücksichtigt man die asymptotische Darstellung von $J_0(z)$, so findet man

$$\omega_r = \frac{\pi}{4} (3 + 4\kappa) \frac{c}{R n_r}, \quad (\kappa = 4, 5, \dots) \quad (50)$$

$$\omega_i = \frac{1}{2} \gamma (\omega_r / \omega_0)^2, \quad (51)$$

falls $s \gg 1/\mu$, $\gamma \ll \omega_0$, $\omega_r \ll \omega_0$. Die niedrigen Ordnungen κ der Eigenschwingungen werden nur sehr ungenau wiedergegeben. Da in (51) die Strahlungsdämpfung noch nicht berücksichtigt ist, gilt

⁶ MAGNUS-OBERHETTINGER, Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der Mathematischen Physik, Springer-Verlag, Berlin 1943.

diese Näherung sicher nur dann, wenn der Energieverlust durch Strahlung hinreichend klein ist. Die Dämpfung durch Stöße steigt mit der Ordnungszahl des Schwingungstyps an und nimmt ab mit dem statischen Magnetfeld. Die Dichte σ der Eigenwerte (Zahl pro Frequenzbereich) steigt wegen der n_r^{-1} -Abhängigkeit (50) mit der Teilchendichte und sinkt mit dem Magnetfeld.

$$\sigma = \text{const} \cdot N^{1/2} H_0^{-1}. \quad (52)$$

Die Gesamtzahl der Eigenwerte unterhalb der Ionenresonanz ist aber unabhängig vom Magnetfeld, da der gesamte zur Verfügung stehende Frequenzbereich mit dem Magnetfeld zunimmt, im selben Maße wie die Eigenwertdichte abnimmt.

IV. Freie Schwingungen einer Plasmaplatte in einem Magnetfeld

Das dem hier vorliegenden zylindrischen Problem mit azimutalen Strömen und axialem Magnetfeld

entsprechende ebene Gebilde ist ein in y - und z -Richtung unbegrenzter plattenförmiger Plasmabereich,

$$-x_0 \leq x \leq x_0,$$

welcher einem homogenen statischen Magnetfeld in z -Richtung ausgesetzt ist. In den beiden Begrenzungsebenen $x = x_0$ und $x = -x_0$ fließen Wechselströme in y -Richtung im Gegentakt, welche ebene elektromagnetische Wellen anregen. Der Brechungsindex des Mediums wird für diese Polarisation (E_y, H_z) wieder durch (16) gegeben. (Vgl. I.)

Bei verschwindenden Strömen erhält man als Gleichung für die Eigenfrequenzen ω des Systems

$$\omega = \frac{c}{2 i n(\omega) x_0} \cdot \ln \frac{n(\omega) - 1}{n(\omega) + 1}. \quad (53)$$

Wegen der Vieldeutigkeit des Logarithmus treten wieder Oberschwingungen auf, welche aber nicht streng äquidistant liegen, da sich n mit ω ändert.

Die Impedanz einer Spule mit einem Plasma als Dielektrikum

Von KLAUS KÖRPER

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik, Göttingen *
(Z. Naturforsch. 15 a, 226—235 [1960]; eingegangen am 17. Januar 1960)

From the basic equations of magneto-hydrodynamics the energy conservation theorem for plasmas is derived for events periodic in time. In addition to the terms known from vacuum electrodynamics, there are the kinetic energies of the electrons and ions, and a term due to the oscillations of the electrons and ions in the magnetic field. — With the help of the solution for the radially oscillating cylinder, the impedance of a coil containing the plasma is derived from general energy considerations. The impedance [eq. (31)] is discussed and its mean value in the range between two eigenfrequencies of the plasma cylinder is given.

In einer früheren Arbeit^{1, 2} wurden die Lösungen der auf einer Zwei-Flüssigkeits-Theorie beruhenden Grundgleichungen des Plasmas³ für einen in einem axialen Magnetfeld radial schwingenden homogenen unendlich langen Plasmazylinder hergeleitet. Hiermit läßt sich auch die durch die kollektive Schwingung der geladenen Plasmamaterie bedingte makroskopische Ausstrahlung ins äußere umgebende Vakuum beschreiben.

Die von strahlenoptischen Modellvorstellungen der Wellenausbreitung herrührende begriffliche Schwierigkeit der Unterscheidung: absorbierte und das endliche Plasmavolumen durchdringende Energie oder

aufgenommene und reflektierte Energie entfällt im Rahmen einer feldmäßigen Behandlung. Hier lassen sich die betreffenden Leistungen aus dem resultierenden Wellenfeld durch Oberflächenintegrale des POYNTING-Vektors über geeignet gelegte Hüllflächen gewinnen.

I. Energetische Betrachtungen

Bei der üblichen Art der Interpretation komplexer Größen hat nur ihr Realteil unmittelbare physikalische Bedeutung. Komplexe Größen werden nur der rechnerischen Einfachheit halber bevorzugt.

* Seit Herbst 1958 in München.

¹ K. KÖRPER, Z. Naturforsch. 12 a, 815 [1957]. Im folgenden als I bezeichnet.

² K. KÖRPER, Z. Naturforsch. 15 a, 220 [1960]. Im folgenden mit II bezeichnet.

³ A. SCHLÜTER, Z. Naturforsch. 5 a, 721 [1950].